Instituto de Matemática
Cálculo 2
2019-1

Prueba Nº 1

Apellido paterno:	Apellido materno:	Nombre:

Pregunta 1	Pregunta 2	Pregunta 3	Total	Nota

<u>**Instrucciones**</u>:
- **NO HAY CONSULTAS**. Las respuestas sin desarrollo o sin justificación, no dan puntaje.
- Queda prohibido el uso de calculadoras programables, formulario y **celulares**.
- La prueba dura 90 minutos.

---

1) [**25 ptos.**] Calcular las siguientes integrales indefinidas:

   a) [**12 ptos.**] $\displaystyle\int \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{x}}}{\sqrt{1-\mathrm{e}^{2\mathrm{x}}}}dx$

   b) [**13 ptos.**] $\displaystyle\int \tan^{3/2} x \sec^4 x \; dx$

2) [**25 ptos.**] Calcular las siguientes integrales indefinidas:

   a) [**12 ptos.**] $\displaystyle\int \frac{1}{5+4\cos x}dx$

   b) [**13 ptos.**] $\displaystyle\int \frac{x^4-x^3+3x^2+3}{(x-1)(x^2+2)}dx$

3) [**10 pts.**] Determinar la función, cuya gráfica pasa por el punto $\left(1, \frac{1}{16}\right)$ y cuya derivada es dada por $f'(x) = x^3\ln(x)$.

DESARROLLO

1) a) Si se hace $u = e^x$ (2 pts.), entonces se tiene que $du = e^x dx$. Luego la integral

$$\int \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{x}}}{\sqrt{1-\mathrm{e}^{2\mathrm{x}}}}dx$$

con el cambio de variable nos queda

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}du \qquad \text{3 pts.}$$

la cual se resuelve con el siguiente cambio de variable $u = cos(\theta)$ (2 pts.), así $du = -\sin(\theta)d\theta$

por lo tanto queda lo siguiente

$$-\int \frac{\sin(\theta)}{\sqrt{1-\cos^2(\theta)}}d\theta = -\int d\theta = -\theta + C. \qquad \text{3 pts.}$$

De esta manera nos queda

$$\int \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{x}}}{\sqrt{1-\mathrm{e}^{2\mathrm{x}}}}dx = -\arccos(e^x) + C \qquad \text{2 pts.}$$

b) $\int \tan^{3/2}(x)\sec^4(x)dx$ se hace escribiendo $\sec^4(x) = \sec^2(x)\sec^2(x) = (1 + \tan^2(x))\sec^2(x)$ (2 pts.). Luego obtenemos

$$\begin{aligned}\int \tan^{3/2}(x)\sec^4(x)dx &= \int \tan^{3/2}(x)(1+\tan^2(x))\sec^2(x)dx \qquad \text{2 pts.}\\ &= \int \tan^{3/2}(x)\sec^2(x)dx + \int \tan^{7/2}(x)\sec^2(x)dx \qquad \text{3 pts.}\end{aligned}$$

Luego se hace el cambio de variable $u = \tan(x)$ (2pts.) y entonces $du = \sec^2(x)dx$. Así nos queda

$$\int \tan^{3/2}(x)\sec^4(x)dx = \frac{2}{5}\tan^{5/2}(x) + \frac{2}{9}\tan^{9/2}(x) + C \qquad \text{3 pts.}$$

2) a) Se utiliza el cambio de variable $z = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ (3 pts.). Así la integral queda

$$\int \frac{\frac{2}{1+z^2}}{5+4\left(\frac{1-z^2}{1+z^2}\right)}dz = \int \frac{2}{9+z^2}dz = 2\int \frac{1}{9+z^2}dz. \qquad \text{5 pts}$$

La última integral se resuelve haciendo el cambio de variable $z = 3tan(\theta)$, en tal caso $dz = 3\sec^2(x)$. Por lo tanto queda

$$\int \frac{\frac{2}{1+z^2}}{5+4\left(\frac{1-z^2}{1+z^2}\right)}dz = \int \frac{2}{9+z^2}dz = 2\int \frac{1}{9+z^2}dz = \frac{2}{3}\arctan\left(\frac{z}{3}\right) + C. \qquad \text{3 pts.}$$

y así

$$\int \frac{1}{5+4\sin x}dx = \frac{2}{3}\arctan\left(\frac{1}{3}\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right) + C \qquad \text{1 pts.}$$

b) Por algoritmo de la división se tiene que:

$$\frac{x^4 - x^3 + 3x^2 + 3}{x^3 - x^2 + 2x - 2} = x + \frac{x^2 + 2x + 3}{x^3 - x^2 + 2x - 2}. \qquad \textit{2pts}$$

Por fracciones parciales:

$$\frac{x^2 + 2x + 3}{(x^2 + 2)(x - 1)} = \frac{1 - x}{x^2 + 2} + \frac{2}{x - 1}. \qquad \textit{4pts.}$$

Luego

$$\begin{aligned}\int \frac{x^4 - x^3 + 3x^2 + 3}{x^3 - x^2 + 2x - 2}dx &= \frac{x^2}{2} + \int \frac{1}{x^2 + 2}dx - \int \frac{x}{x^2 + 2}dx + \int \frac{2}{x - 1}dx \qquad \text{2 pts}\\ &= \frac{x^2}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) - 2\ln|x - 1| - \frac{1}{2}\ln|x^2 + 2| + C\end{aligned}$$

4 pts

3) La función $f(x)$ es dada por $f(x) = \int x^3 \ln(x)dx$ luego utilizamos integración por parte $u = \ln(x)$ y $dv = x^3dx$, así $du = \frac{1}{x}dx$ y $v = \frac{x^4}{4}$. Por lo tanto

$$f(x) = \frac{\ln(x)x^4}{4} - \frac{1}{4}\int \frac{x^4}{x}dx = \frac{\ln(x)x^4}{4} - \frac{1}{16}x^4 + C. \qquad \text{5 pts.}$$

Luego como la gráfica pasa por $(1, \frac{1}{16})$, entonces $f(1) = \frac{1}{16}$, por lo tanto

$$-\frac{1}{16} + C = \frac{1}{16} \qquad \text{4 pts}$$

y así $C = \frac{1}{8}$. Luego $f(x) = \frac{\ln(x)x^4}{4} - \frac{1}{4}\int \frac{x^4}{x}dx = \frac{\ln(x)x^4}{4} - \frac{1}{16}x^4 + \frac{1}{8}$. 1 pto.